



মো: মাহবুব খান মুরাদ  
সহকারী অধ্যাপক,  
গণিত বিভাগ

[muradmath26@gmail.com](mailto:muradmath26@gmail.com)

01717797577

# শাগান



অন্বয় (Relation) : মনে করি, সকল  $x$  এর সেট  $A$  এবং সকল  $y$  এর সেট  $B$ . সুতরাং  $A \times B$  দ্বারা সকল  $\{(x,y)\}$  এর সেট নির্দেশ করে এবং  $A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\}$  প্রতীক দ্বারা সূচিত হয়। ধরি,  $A$  ও  $B$  সেটের অন্বয়  $R$  দ্বারা নির্দেশিত। এই  $R$  দ্বারা এমন একটি খোলা বাক্য বোঝানো হয় যা  $A \times B$ । সেটের সদস্য  $(x, y)$  জোড়ের জন্য  $P(x, y)$  সত্য বা মিথ্যা হতে পারে। এখানে  $P(x, y)$  দ্বারা  $x$  ও  $y$  এর মধ্যে সম্পর্ক বোঝায়।  $x$  ও  $y$  সম্পর্কিত হলে  $P(x, y)$  সত্য আবার  $x$  ও  $y$  সম্পর্কিত না হলে  $P(x, y)$  সত্য নয়। অতএব  $R \subseteq A \times B$

সাধারণত  $R = \{x \in A, y \in B, P(x, y)\}$  দ্বারা অন্বয় সূচিত করা হয়।  $aRb$  এর অর্থ হল  $a, b$  এর সাথে সম্পর্কিত।  $aRb$  হলে  $P(a, b)$  সত্য হবে। আবার  $P(a, b)$  সত্য হলে  $aRb$  হবে। অতএব,  $x \in A, y \in B$  হলে  $R = \{(x, y) | (x, y) \in A \times B\}$  আবার  $x$  ও  $y$  সম্পর্কিত না হলে  $(x, y) \notin R$  এবং বিপরীত ক্রমেও সত্য।

**উদাহরণ ১ :**  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  এবং  $B = \{1, 3, 5\}$  দুটি সেট বিবেচনা করি। সেট দুটির কার্তেসীয় গুণজ,  $A \times B = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 3, 5\}$

$$= \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$$

$A$  সেটের যে যে উপাদান  $B$  সেটের যে যে উপাদানের চেয়ে ছোট তাদের নিয়ে ক্রমজোড়ের একটি সেট  $F$  গঠন করি।

$$\text{অতএব, } F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$$

স্পষ্টতই,  $F$  সেটের অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান  $A$  সেট থেকে এবং দ্বিতীয় উপাদান  $B$  সেট থেকে নেয়া হয়েছে যেন প্রথম উপাদানটি দ্বিতীয় উপাদানের চেয়ে ছোট হয়। এক্ষেত্রে বলা হয়,  $F$  সেটটি  $A$  থেকে  $B$  সেটে একটি অন্বয়। প্রতীকের সাহায্যে আমরা অন্বয়টি নিম্নলিখিতভাবে বর্ণনা করতে পারিঃ

$$F = \{(x, y) | x \in A, y \in B \text{ এবং } x < y\}$$

উল্লেখ্য,  $F$  সেট  $A \times B$  কার্তেসীয় গুণজ সেটের একটি উপসেট অর্থাৎ  $F \subset A \times B$

**উদাহরণ-২ :** যদি  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  এবং  $B = \{3, 6, 7, 10\}$  দুটি সেট বিবেচনা করি।

$A$  সেটের যে সমস্ত সদস্য দ্বারা  $B$  সেটের যে সদস্যগুলো বিভাজ্য হয় তাদের অন্বিত করে নিচের চিত্রে দেখানো হল :

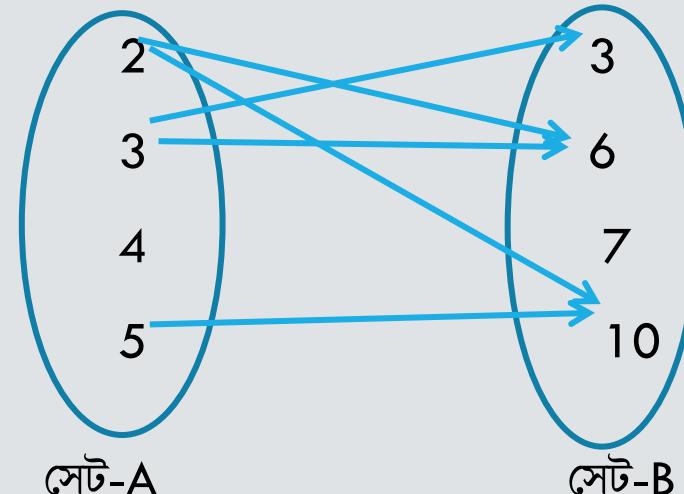
এরূপ অন্বিত সদস্যদের দ্বারা গঠিত ক্রমজোড়গুলোর সেট  $D$  গঠন করি। অতএব,  $D = \{(2, 6), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (5, 10)\}$

এই  $D$  সেটটি দ্বারা উল্লেখিত বিভাজ্যতা সম্পর্কটি বর্ণনা করা যায়।  $D$  সেটে অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম পদ  $A$  সেটের সদস্য ও দ্বিতীয় পদ  $B$  সেটের সদস্য এবং প্রথম পদ দ্বারা দ্বিতীয় পদ বিভাজ্য।

এখানে  $D$  সেটটি  $A$  সেট থেকে  $B$  সেটে একটি অন্বয় এবং  $D = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$  এবং  $x$  দ্বারা  $y$  বিভাজ্য। স্পষ্টতই,  $D \subseteq A \times B$

সংজ্ঞাঃ নির্দিষ্ট শর্ত সাপেক্ষে দুইটি সেট সম্পর্ক গঠন করলে অর্থাৎ  $A$  এবং  $B$  দুটি সেট হলে, কার্তেসীয় গুণজ সেট  $A \times B$  এর কোন অশূন্য উপসেটকে  $A$  থেকে  $B$ -তে একটি অন্বয় (**relation**) বলে।  $A$  থেকে  $B$  এর অন্বয়  $R \subseteq A \times B$ .

আবার,  $A$  সেট হলে  $A \times A$  এর কোন অশূন্য উপসেট  $A$  সেটে একটি অন্বয় বলা হয়। প্রত্যেক অন্বয় এক বা একাধিক ক্রমজোড়ের একটি সেট।



অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain and Range of relation) : অন্বয়ের সদস্য ক্রমজোড়গুলির প্রথম উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে অন্বয়ের ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানগুলি নিয়ে গঠিত সেটকে অন্বয়ের রেঞ্জ বলে।

ধরি, A সেট থেকে B সেটে F একটি অন্বয়, অর্থাৎ  $F \subset A \times B$ , F সেটে অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে F এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে F এর রেঞ্জ বলা হয়। F এর ডোমেনকে ডোম F এবং রেঞ্জকে রেঞ্জ F লিখে সংক্ষেপে প্রকাশ করা হয়।

**উদাহরণ ৩ :** পূর্বে উদাহরণ-১ এ বর্ণিত অন্বয়  $F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$  এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করি।

সমাধান :  $F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$

F এর সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানগুলোর সেট  $\{1, 2, 3, 4\}$  এবং দ্বিতীয় উপাদানগুলোর সেট  $\{3, 5\}$

অতএব, ডোমেন  $F = \{1, 2, 3, 4\}$  এবং রেঞ্জ  $F = \{3, 5\}$

### বিপরীত অন্বয় (Inverse relation):

যদি A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয় F হয়, তবে F এর ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানকে দ্বিতীয় উপাদান এবং দ্বিতীয় উপাদানকে প্রথম উপাদান নিয়ে গঠিত ক্রমজোড়ের সেটকে B সেট থেকে A সেটে F এর বিপরীত অন্বয় বলা হয়। একে  $F^{-1}$  দ্বারা সূচিত করা হয়।

উপরোক্ত  $F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$  অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়  $F^{-1}$  হলে

বিপরীত অন্বয়  $F^{-1} = \{(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$  এবং

বিপরীত অন্বয়  $F^{-1}$  অন্বয়ের ডোমেন ও রেঞ্জ হবে যথাক্রমে F অন্বয়ের রেঞ্জ ও ডোমেন।

## ফাংশন (Function):

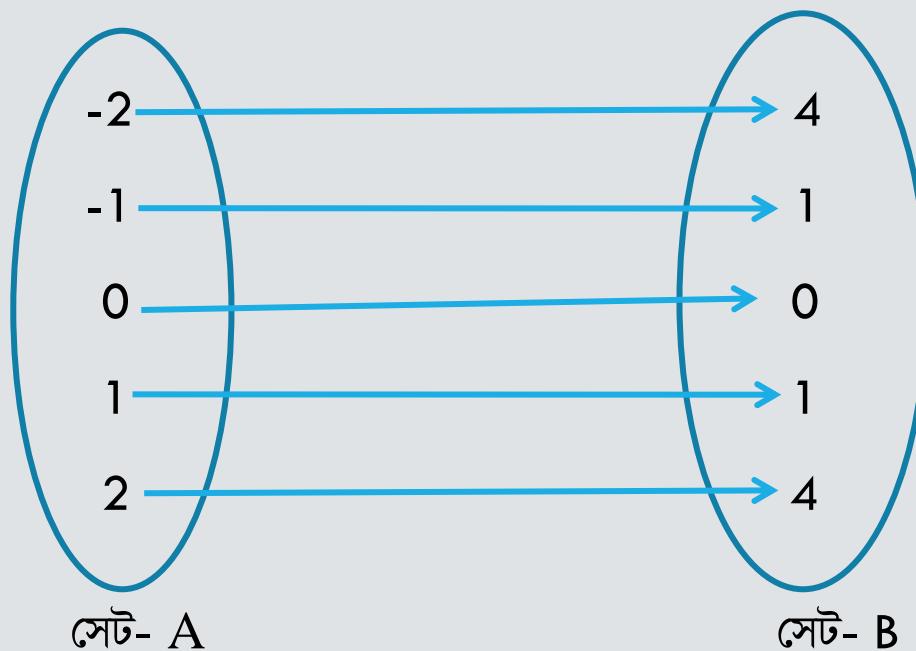
ফাংশনের সংজ্ঞা (অন্তর্যাল মাধ্যমে): একটি বিশেষ ধরনের অন্তর্যাকে ফাংশন বলে। যদি কোন অন্তর্যাল অবস্থিত ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদানগুলি ভিন্ন হলে অথবা একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দুটি ভিন্ন ক্রমজোড় না থাকে , তবে ঐ অন্তর্যাকে ফাংশন বলা হয়।

অর্থাৎ A সেট থেকে B সেটে একটি অন্তর্যাম F কে ফাংশন বলা হবে, যদি A সেটের প্রতিটি উপাদান অন্তর্যাল সদস্য ক্রমজোড়গুলির প্রথম উপাদানে অন্তর্ভুক্ত থাকে এবং ক্রমজোড়গুলির প্রথম উপাদান ভিন্ন ভিন্ন হয়।

উহাকে  $F : A \rightarrow B$  প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

**উদাহরণস্বরূপ:**  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  এবং  $B = \{4, 1, 0, 1, 4\}$  হলে  $F = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ এবং } y = x^2\}$

অর্থাৎ  $F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$  অন্তর্যাটিকে লক্ষ করলে দেখা যায় যে, F অন্তর্যাল সদস্য ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদান ভিন্ন ভিন্ন এবং ১ম উপাদানগুলি নিয়ে গঠিত সেট A এর সমান। অতএব, সংজ্ঞা অনুসারে, F অন্তর্যাটি একটি ফাংশন। তাহলে A সেট ফাংশনের ডোমেন।

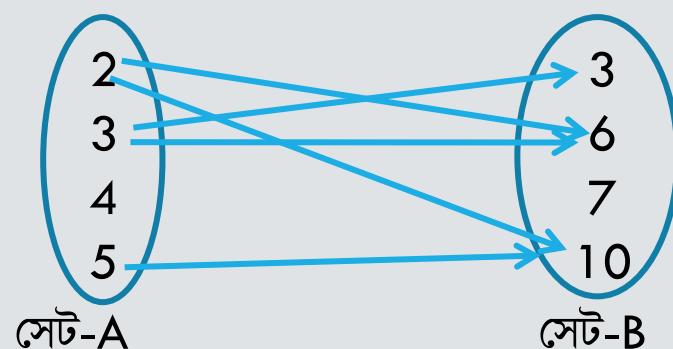


ফাংশনের সংজ্ঞা (চলকের সাহায্যে): যদি  $x$  একটি স্বাধীন চলক এবং  $y$  অধীন চলক হয় এবং স্বাধীন চলক  $x$  এর প্রতিটি ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব মানের জন্য অধীন চলক  $y$  এর যদি এবং কেবল যদি একটি বাস্তব মান পাওয়া যায়, তবে স্বাধীন চলকবিশিষ্ট রাশিটিকে অধীন চলকের একটি ফাংশন বলে অর্থাৎ  $y$  কে  $x$  এর ফাংশন বলা হয়। ইহাকে  $y = f(x)$  দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখানে  $x$  এর মানের উপর  $y$  নির্ভরশীল। কাজেই  $x$  হচ্ছে স্বাধীন চলক এবং  $y$  অধীন চলক।

**উদাহরণস্বরূপ:**  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  এর জন্য  $y = f(x) = 3x + 1$ ;  $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ;  $y = f(x) = |x - 1|$  এক একটি ফাংশন। আবার কিন্তু  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  এর জন্য  $y = f(x) = \pm\sqrt{x^2 + 2}$  ফাংশন নয়। কেননা  $x$  প্রতিটি মানের জন্য  $y$  এর দুটি মান পাওয়া যায়। যেমন  $x = 2$  হলে  $y = f(2) = \pm\sqrt{2^2 + 2} = \pm\sqrt{6}$ .

ফাংশনের সংজ্ঞা (সেটের সাহায্যে): মনে করি,  $A$  ও  $B$  দুটি অশূন্য সেট। যদি  $A$  ও  $B$  এর মধ্যে এমন একটি সম্পর্কযুক্ত হয় যে, যাতে  $A$  এর প্রত্যেকটি পদ  $x$ ,  $B$  এর কোন না কোন একক পদ  $y$  এর সাথে যোগাযোগ সৃষ্টি করে, তবে এই সম্পর্কটিকে ফাংশন বলে। উল্লেখ্য,  $A$  সেটের একটি উপাদানের জন্য  $B$  সেটে কেবলমাত্র একটি উপাদান থাকবে এবং একাধিক উপাদান থাকতে পারবে না। তবে  $A$  সেটের একাধিক উপাদানের জন্য  $B$  সেটে একটি উপাদান থাকতে পারে।  $A$  সেটের  $x$  উপাদান  $B$  সেটের যে উপাদানের সাথে সম্পর্কিত তাকে  $f(x)$  বা,  $\varphi(x)$  বা,  $\psi(x)$  বা,  $g(x)$  দ্বারা সূচিত করা হয়। প্রতীকের সাহায্যে লিখা যায় :  $f : A \rightarrow B$ , বা,  $\varphi : A \rightarrow B$ ,  $\psi : A \rightarrow B$  ইত্যাদি।

**উদাহরণস্বরূপ:** নিম্নে বর্ণিত চিত্র থেকে দেখা যায় যে,  $A$  সেটের উপাদান 2, 3, 4, 5 এবং 10 এর সাথে সম্পর্কিত। আবার  $A$  সেটের উপাদান 3,  $B$  সেটের দুটি উপাদান 6 এবং 10 এর সাথে সম্পর্কিত। সুতরাং  $A$  এবং  $B$  এর মধ্যকার সম্পর্ক ফাংশন নয়।



সমস্যা-১ : প্রদত্ত  $T$  অন্বয়টিকে ক্রমজোড়ের সেটুরপে প্রকাশ কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর :

$$T = \{(x, y) ; x \in A, y \in A \text{ এবং } x-y = 1\} \text{ যেখানে } A = \{-3, -1, 0, 1, 2\}$$

সমাধান : প্রত্যেক  $x \in A$  এর জন্য  $x-y = 1$

বা,  $y = x - 1$  এর মান নির্ণয় :

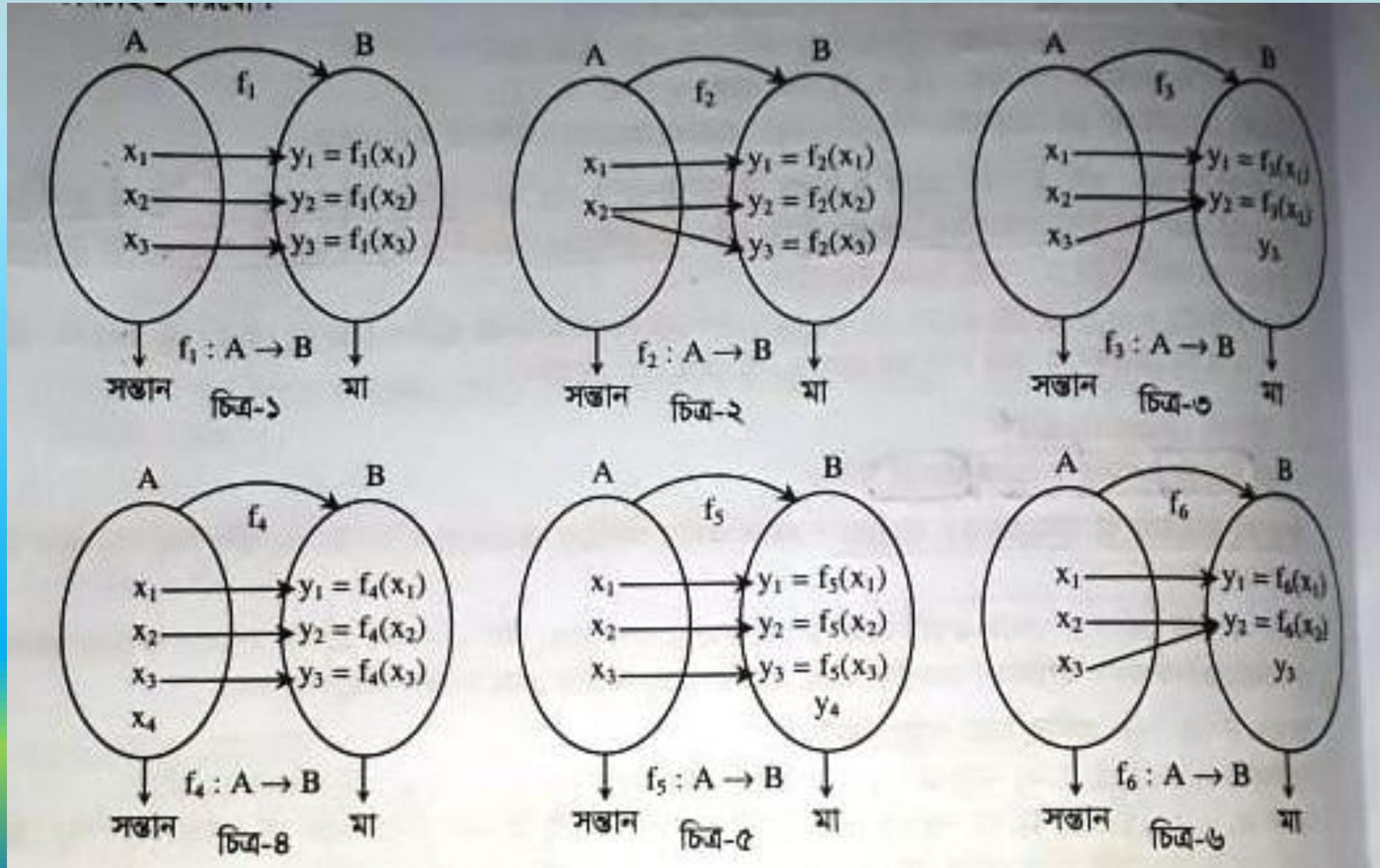
$x$	-3	-1	0	1	2
$y = x - 1$	-4	-2	-1	0	1

কিন্তু  $-4 \notin A$ ,  $-2 \notin A$  অতএব  $(-3, -4) \notin T$ ,  $(-1, -2) \notin T$

$$T = \{(0, -1), (1, 0), (2, 1)\}$$

ফাংশনের সংজ্ঞানুযায়ী, কোন অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দুটি ভিন্ন ক্রমজোড় না থাকলে ঐ অন্বয়টি ফাংশন হয়।  
অতএব,  $T$  অন্বয়টি একটি ফাংশন।

## নিচের চিত্র থেকে নির্ণয় কর কোনটি ফাংশন এবং কোনটি ফাংশন নয় :



## বাড়ির কাজ:

১.  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  সেট থেকে  $B = \{1, 3, 5\}$  সেটে বর্ণিত  $S$  একটি অন্যয়,  
যেখানে  $S = \{(x, y) ; x \in A, y \in B \text{ এবং } x+y=7\}$ .  $S$  কে ক্রমজোড়ের সেটুলপে প্রকাশ কর।
২. প্রদত্ত  $S$  অন্যয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর :
  - (i)  $S = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$
  - (ii)  $S = \{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (2, 3)\}$
  - (iii)  $S = \{(-3, -3), (-1, -1), (0, 1)\}$
৩. প্রদত্ত  $S$  অন্যয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা কর এবং ডোম  $S$  ও রেঞ্জ  $S$  নির্ণয় কর।  
যেখানে  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $S = \{(x, y) ; x \in A, y \in A \text{ এবং } x+y=1\}$
৪. প্রদত্ত  $T$  অন্যয়টি ক্রমজোড়ের সেটুলপে লিখ এবং অন্যয়টি ফাংশন কিনা নির্ণয় কর:  
যেখানে  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ;  $T = \{(x, y) ; x \in A, y \in A \text{ এবং } y = x^2\}$
৫.  $N$  স্বাভাবিক সংখ্যার সেট এবং  $S = \{(x, y) ; x \in N, y \in N \text{ এবং } 2x+y=10\}$  হলে, অন্যয় থেকে  $S$  ক্রমজোড়ের সেটুলপে প্রকাশ কর এবং এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।



ଧନ୍ୟବାଦ